**Понятие фрактал**

Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х, с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово фрактал образовано от латинского fractus и в переводе означает состоящий из фрагментов. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 году книги Мандельброта `The Fractal Geometry of Nature'. В его работах использованы научные результаты других ученых, работавших в период 1875-1925 годов в той же области (Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф). Но только в наше время удалось объединить их работы в единую систему.

Роль фракталов в машинной графике сегодня достаточно велика. Они приходят на помощь, например, когда требуется, с помощью нескольких коэффициентов, задать линии и поверхности очень сложной формы. С точки зрения машинной графики, фрактальная геометрия незаменима при генерации искусственных облаков, гор, поверхности моря. Фактически найден способ легкого представления сложных неевклидовых объектов, образы которых весьма похожи на природные.

Одним из основных свойств фракталов является самоподобие. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о всем фрактале. Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: "Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому".

Существует большое число математических объектов называемых фракталами (треугольник Серпинского, снежинка Коха, кривая Пеано, множество Мандельброта и лоренцевы аттракторы). Фракталы с большой точностью описывают многие физические явления и образования реального мира: горы, облака, турбулентные (вихревые) течения, корни, ветви и листья деревьев, кровеносные сосуды, что далеко не соответствует простым геометрическим фигурам. Впервые о фрактальной природе нашего мира заговорил Бенуа Мандельброт в своей основополагающей работе "Фрактальная геометрия природы"

Термин фрактал введен Бенуа Мандельбротом в 1977 году в его фундаментальной работе "Фракталы, Форма, Хаос и Размерность". Согласно Мандельброту, слово фрактал происходит от латинских слов fractus - дробный и frangere - ломать, что отражает суть фрактала, как "изломанного", нерегулярного множества . [1]

**Геометрические фракталы**

Фракталы этого класса самые наглядные. В двухмерном случае их получают с помощью ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.

Рассмотрим на примере один из таких фрактальных объектов – триадную кривую Коха.

**Построение триадной кривой Коха**

Возьмем прямолинейный отрезок длины 1. Назовем его *затравкой*. Разобьем затравку на три равные части длиной в 1/3, отбросим среднюю часть и заменим ее ломаной из двух звеньев длиной 1/3.

Мы получим ломаную, состоящую из 4 звеньев с общей длиной 4/3 , - так называем *первое поколение*.

Для того чтобы перейти к следующему поколению кривой Коха, надо у каждого звена отбросить и заменить среднюю часть. Соответственно длина второго поколения будет 16/9, третьего – 64/27. если продолжить этот процесс до бесконечности, то в результате получится триадная кривая Коха.

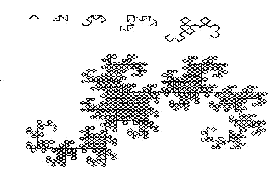
Рассмотрим теперь свойства триадной кривой Коха и выясним, почему же фракталы называли «монстрами».

Во-первых, эта кривая не имеет длины – как мы убедились, с числом поколений ее длина стремится к бесконечности.

Во-вторых, к этой кривой невозможно построить касательную – каждая ее точка является точкой перегиба, в которой производная не существует, - эта кривая не гладкая.

Длина и гладкость – фундаментальные свойства кривых, которые изучаются как евклидовой геометрией, так и геометрией Лобачевского, Римана. К триадной кривой Коха традиционные методы геометрического анализа оказались неприменимы, поэтому кривая Коха оказалась чудовищем – «монстром» среди гладких обитателей традиционных геометрий.[2]

**Построение "дракона" Хартера-Хейтуэя**

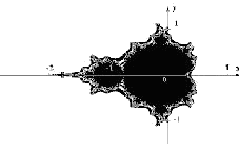
Для получения другого фрактального объекта нужно изменить правила построения. Пусть образующим элементом будут два равных отрезка, соединенных под прямым углом. В нулевом поколении заменим единичный отрезок на этот образующий элемент так, чтобы угол был сверху. Можно сказать, что при такой замене происходит смещение середины звена. При построении следующих поколений выполняется правило: самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, а при замене следующих звеньев, направления смещения середин отрезков должны чередоваться. На рисунке представлены несколько первых поколений и 11-е поколение кривой, построенной по вышеописанному принципу. Кривая, при n стремящемуся к бесконечности, называется драконом Хартера-Хейтуэя.   
В машинной графике использование геометрических фракталов необходимо при получении изображений деревьев, кустов. Двухмерные геометрические фракталы используются для создания объемных текстур (рисунка на поверхности объекта).

**Алгебраические фракталы**

Это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n-мерных пространствах. Наиболее изучены двухмерные процессы. Интерпретируя нелинейный итерационный процесс, как дискретную динамическую систему, можно пользоваться терминологией теории этих систем: фазовый портрет, установившийся процесс, аттрактор и т.д.

Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (или как говорят - аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Если фазовым является двухмерное пространство, то окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры.

**Множество Мандельброта**

В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта. Алгоритм его построения достаточно прост и основан на простом итеративном выражении: **Z[i+1] = Z[i] \* Z[i] + C**, где **Zi** и **C** - комплексные переменные. Итерации выполняются для каждой стартовой точки с прямоугольной или квадратной области - подмножестве комплексной плоскости. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока **Z[i]** не выйдет за пределы окружности радиуса 2, центр которой лежит в точке (0,0), (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности), или после достаточно большого числа итераций (например 200-500) **Z[i]** сойдется к какой-нибудь точке окружности. В зависимости от количества итераций, в течении которых **Z[i]** оставалась внутри окружности, можно установить цвет точки **C** (если **Z[i]** остается внутри окружности в течение достаточно большого количества итераций, итерационный процесс прекращается и эта точка растра окрашивается в черный цвет).

**Стохастические фракталы**

Еще одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе хаотически менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря .   
Существуют и другие классификации фракталов, например деление фракталов на детерминированные (алгебраические и геометрические) и недетерминированные (стохастические).

**О применении фракталов**

Прежде всего, фракталы - область удивительного математического искусства, когда с помощью простейших формул и алгоритмов получаются картины необычайной красоты и сложности! В контурах построенных изображений нередко угадываются листья, деревья и цветы.

Одни из наиболее мощных приложений фракталов лежат в компьютерной графике. Во-первых, это фрактальное сжатие изображений, и во-вторых построение ландшафтов, деревьев, растений и генерирование фрактальных текстур. Современная физика и механика только-только начинают изучать поведение фрактальных объектов. И, конечно же, фракталы применяются непосредственно в самой математике.

Достоинства алгоритмов фрактального сжатия изображений - очень маленький размер упакованного файла и малое время восстановления картинки. Фрактально упакованные картинки можно масштабировать без появления пикселизации. Но процесс сжатия занимает продолжительное время и иногда длится часами. Алгоритм фрактальной упаковки с потерей качества позволяет задать степень сжатия, аналогично формату jpeg. В основе алгоритма лежит поиск больших кусков изображения подобных некоторым маленьким кусочкам. И в выходной файл записывается только какой кусочек какому подобен. При сжатии обычно используют квадратную сетку (кусочки - квадраты), что приводит к небольшой угловатости при восстановлении картинки, шестиугольная сетка лишена такого недостатка.

Компанией Iterated разработан новый формат изображений "Sting", сочетающий в себе фрактальное и «волновое» (такое как в формате jpeg) сжатие без потерь. Новый формат позволяет создавать изображения с возможностью последующего высококачественного масштабирования, причем объем графических файлов составляет 15-20% от объема несжатых изображений.

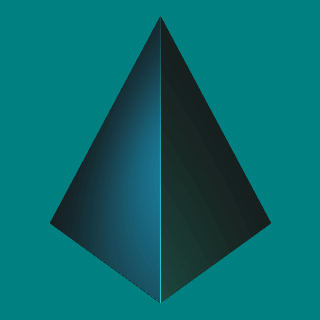
Склонность фракталов походить на горы, цветы и деревья эксплуатируется некоторыми графическими редакторами, например фрактальные облака из 3D studio MAX, фрактальные горы в World Builder. Фрактальные деревья, горы и целые пейзажи задаются простыми формулами, легко программируются и не распадаются на отдельные треугольники и кубики при приближении.

Нельзя обойти стороной и применения фракталов в самой математике. В теории множеств множество Кантора доказывает существование совершенных нигде не плотных множеств, в теории меры самоаффинная функция "Канторова лестница" является хорошим примером функции распределения сингулярной меры.   
В механике и физике фракталы используются благодаря уникальному свойству повторять очертания многих объектов природы. Фракталы позволяют приближать деревья, горные поверхности и трещины с более высокой точностью, чем приближения наборами отрезков или многоугольников (при том же объеме хранимых данных). Фрактальные модели, как и природные объекты, обладают "шероховатостью", и свойство это сохраняется при сколь угодно большом увеличении модели. Наличие на фракталах равномерной меры, позволяет применять интегрирование, теорию потенциала, использовать их вместо стандартных объектов в уже исследованных уравнениях.

При фрактальном подходе хаос перестает быть синимом беспорядка и обретает тонкую структуру. Фрактальная наука еще очень молода, и ей предстоит большое будущее. Красота фракталов далеко не исчерпана и еще подарит нам немало шедевров - тех, которые услаждают глаз, и тех, которые доставляют истинное наслаждение разуму.[3]

**О построении фракталов**

**Метод последовательных приближений**

Глядя на эту картинку, нетрудно понять, как можно построить самоподобный фрактал (в данном случае пирамиду Серпинского). Нужно взять обычную пирамиду (тетраэдр), затем вырезать ее середину (октаэдр), в результате чего у нас получается четыре маленьких пирамидки. С каждой из них мы проделываем ту же самую операцию и т.д. Это несколько наивное, но наглядное объяснение.

Рассмотрим суть метода более строго. Пусть имеется некоторая IFS-система, т.е. система сжимающих отображений **S**={S1,...,Sm} Si:Rn->Rn (например, для нашей пирамидки отображения имеют вид Si(x)=1/2\*x+oi, где oi - вершины тетраэдра, i=1,..,4). Затем выбираем некоторое компактное множество A1 в Rn (в нашем случае выбираем тетраэдр). И определяем по индукции последовательность множеств Ak:Ak+1=S1(Ak) U...U Sm(Ak). Известно, что множества Ak с ростом k, всё лучше приближают искомый аттрактор системы **S**.

Заметим, что каждая из этих итераций является аттрактором *рекуррентной системы итерированных функций* (английский термин *Digraph IFS*, *RIFS* и также *Graph-directed IFS*) и поэтому их легко построить с помощью нашей программы.

**О фракталах и их алгоритмах**

Фрактал происходит от латинского прилагательного "fractus", и в переводе означает состоящий из фрагментов, а соответствующий латинский глагол "frangere" означает разбивать, то есть создавать неправильные фрагменты. Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х, с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Термин был предложен Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 году книги Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature» - «Фрактальная геометрия природы». В его работах использованы научные результаты других ученых, работавших в период 1875-1925 годов в той же области (Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф).

В основе построения фракталов лежит некая нелинейная функция комплексного процесса с обратной связью z=> z2+c поскольку z и с -комплексные числа, то z=x+iy, c=p+iq необходимо разложить его на х и у чтобы перейти в более реальную для простого человека плоскость:

*x(k+1)=x(k)2-y(k)2 + p,*

*y(k+1)=2\*x(k)\*y(k) + q.*

 Плоскость, состоящая из всех пар (x,y), может рассматриваться, как при фиксированных значениях **р и q**, так и при динамических. В первом случае перебирая по закону все точки (х,у) плоскости и окрашивая их в зависимости от количества повторений функции необходимых для выхода из итерационного процесса или не окрашивая (черный цвет) при превышении допустимого максимума повторений мы получим отображение множества Жюлиа. Если, напротив, определить начальную пару значений (x,y) и проследить ее колористическую судьбу при динамически изменяющихся значениях параметров p и q, то получаем изображения, называемые множествами Мандельброта.[4]

**Список литературы**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Бондаренко В.А.,Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений по Барнсли-Слоану. Автоматика и телемеханика.-1994.-N5.-с.12-20. 2. Ватолин Д. Применение фракталов в машинной графике. Computerworld-Россия.-1995.-N15.-с.11. 3. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ.-М.: Мир,1991.-254с.(Jens Feder, Plenum Press, NewYork, 1988) 4. Application of fractals and chaos. 1993, Springer-Verlag, Berlin. |