**Практическая часть**

**Методы решения Диофантовых уравнений**

**1. Алгоритм Евклида.**

Можно найти наибольший общий делитель натуральных чисел а и b, не раскладывая эти числа на простые множители, а применяя процесс деления с ос­татком. Для этого надо разделить большее из этих чисел на меньшее, потом меньшее из чисел на остаток при первом делении, затем остаток при первом деле­нии на остаток при  втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка. Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД (а, b).

Чтобы доказать это утверждение, представим описанный процесс в виде следующей цепочки неравенств: если а>b, то

a = b\*q0 + r1

b = r1\*q1 + r2

r1 = r2\*q2 + r3

…

rn-1 = rn\*qn

Здесь r1, …, rn – положительные остатки, убывающие с возрастанием но­мера. Из первого неравенства следует, что общий делитель чисел а и b делит r1 и общий делитель b и r1 делит а, поэтому НОД (а, b) = НОД (b, r1). Переходя к сле­дующим неравенствам системы, получаем:

НОД(а, b) = НОД (b, r1) = НОД (r1,r2) = … = НОД (rn-1, rn) = НОД (rn, 0) = rn. [1]

Таким образом, решая Диофантовы уравнения первой степени  ax + by = с, можно  применять следующие теоремы:

***Теорема1****.* Если  НОД (a, b) = 1, то уравнение a\*x + b\*y = 1 имеет, по меньшей мере, одну пару (x, y) целого решения.

***Теорема 2.*** Если НОД (a, b) = d >1, и число с не делится на d, то уравнение а\*х + b\*y = с не имеет целого решения.

*Доказательство.* Предположим, что уравнение а\*х + b\*y = с имеет целое реше­ние (х0, y0). Так как,  аd, bd, то получим, что  с = (а\*х + b\*y)d. Это противоречит условиям теоремы и тем самым теорема доказана.

***Теорема 3.*** Если НОД (a, b) = 1,то все целые решения уравнения а\*х + b\*y = с опре­деляются формулой:

х = х0\*с + b\*t

y = y0\*c - a\*t.

Здесь (х0, y0) – целое решение уравнения а\*х + b\*y = 1, t – произвольное целое число.

**Пример 1.**  Решить в целых числах уравнение 54\*х + 37\*у = 1.

По алгоритму Евклида а = 54, b = 37. Подставляем данные под алгоритм и получаем:

54=37\*1+17, остаток от деления 17 = 54 – 37\*1

Далее, следуя алгоритму, получаем:

37 = 17\*2+3 ,

3 = 37-17\*2

17 = 3\*5+2 ,

2 = 17- 3\*5

3 = 2\*1+1 ,

1 = 3 – 2\*1

После нахождения единицы выражаем через неё значения а и b:

1 = 3 – (17 - 3\*5);

1 = 17 - 3\*4;

1 = 17 - (37 - 17\*2) \*4;

1 = 17 – 37\*4+17\*8;

1 = 17\*9 – 37\*4;

1 = (54- 37\*1) \*9 – 37\*4;

1 = 54\*9 – 37\*9 – 37\*4;

1 = 54\*9 – 37\*3;

1 = 54\*х + 37\*у.

Следовательно,  х0 = 9, у0 = -13. Значит, данное уравнение имеет следующее решение 
**Пример 2.** Требуется найти целое решение уравнения 15x + 37y = 1.

***1-й метод.*** Воспользуемся разложением единицы:

1 = 15\*5 + 37\*(-2).

Ответ:  x = 5, y = -2.

***2-й метод.*** Применяя алгоритм Евклида, имеем: 37 = 15\*2 + 7, 15 = 2\*7 + 1.

Отсюда 1 = 15 – 2\*7 = 15 – 2(37 – 15\*2) = 15\*5 + (-2)\*37.

Тогда  xо = 5, yо = - 2.

Общее решение уравнения есть система .

**Пример 3**. В уравнении 16x + 34y = 7, НОД (16, 34) = 2  и 7 не делится на 2,то нет целых решений.[2]

**2. Цепная дробь**

Одним из применений алгоритма Евклида является представление дроби a1/a2 в виде  q1 + 1/(q2 + 1/…(qn-1 + 1/qn))…

Где **q1** – целое число, а **q2**, … ,**qn** – натуральные числа. Такое выражение на­зывается цепной (конечной непрерывной) дробью.

Уравнение: a\*x + b\*y = c

с взаимно простыми коэффициентами *a* и*b* имеет решение

x0 = (-1)n \* c\*Qn-1,

y0 = (-1)n+1 \* c\*Pn-1,

где Pn-1/ Qn-1 - предпоследняя подходящая дробь к цепной дроби , в которую раскладывается дробь a/d.

**Доказательство:**

Если для заданной цепной дроби с последовательными частными q1, q2,…,qnнесократимые дроби P1/Q1, P2/Q2, … Pn/Qn являются результатами свертывания подходящих дробей q1 + 1/q2,  q1 + 1/(q2 + 1/q3), и т.д. порядка 1, 2, …, n соответственно, то

Pk/Qk – Pk-1/Qk-1 = (-1)k/(Qk \* Qk-1), k=2, …, n.

При *k = n* получаем: Pn/Qn – Pn-1/Qn-1 = (-1)n/(Qn \* Qn-1),

Где Pn/Qn = a/b - последняя подходящая дробь к цепной дроби, в которую раскладывается дробь a/b. Так как дроби Pn/Qn и a/b несократимы, то Pn = a, Qn = b и a\*Qn-1 – b\* Pn-1 = (-1)n.

Умножая обе части последнего равенства на (-1)n, имеем  a\*((-1)n \*c\*Qn-1)+b\*((-1)n+1 \*c\*Pn-1) = c,

То есть пара чисел x0 = (-1)n \*c\*Qn-1, y0 = (-1)n+1 \*c\*Pn-1 , где n - порядок цепной дроби, является решением уравнения a\*x + b\*y = c.

**Пример.**Для перевозки большого количества контейнеров по 170 кг и по 190 кг выделены трехтонные машины. Можно ли ими загружать машины полно­стью?

**Решение:**

Пусть **х** и **у** количество контейнеров по 170 и 190 кг соответственно, тогда имеем уравнение

170\*х+190\*у=3000,

После сокращения на 10 уравнение выглядит так,

17\*х+19\*у=300.

Для нахождения частного решения воспользуемся разложением дроби 17/19 в цепную дробь 17/19 = 1/(1+2/17) = 1/(1+1/(8+1/2)).

Свернув предпоследнюю подходящую к ней дробь в обыкновенную 1/(1+1/8) = 8/9.

Частное решение данного уравнения имеет вид х0 = (-1)4\*300\*9=2700,  у0=(-1)5\*300\*8=-2400, а общее задается формулой

Х = 2700-19k,       y = -2400+17k.

откуда получаем условие на параметр k

141 < 2400/17 ≤ k ≤ 2700/19 < 143

Т.е. k=142, x=2,  y=14.[3]

**3.** **Метод разложения на множители**

Данный метод и все последующие применяются к решению Диофантовых уравнений второй степени.

**Задача 1.** Решить в целых числах уравнение x + y = x\*y.

**Решение.** Запишем уравнение в виде

(x - 1)(y - 1) = 1.

Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они равны 1. Т. е. исходное уравнение равносильно совокупности



с решениями (0,0) и (2,2).

**4. Использование четности**

**Задача 2.** Решить в простых числах уравнение  x2 – 2\*y2 = 1.

**Решение.** Рассмотрим два случая в зависимости от четности переменной x.

1. Пусть x - нечетное число. Подстановка x = 2\*t + 1 приводит исходное уравне­ние к виду (2\*t + 1)2 – 2\*y2 = 1, или 2\*y2 = 4\*t(t + 1).

Следовательно, 2 | y2. Так как y - простое число, то y = 2. Отсюда x = $\sqrt{1+2\*2\*2}$ = 3.

б) Пусть x - четное число. Так как x - простое число, то x = 2.

Следовательно, y = $\sqrt{3/2}$  не принадлежит N, т. е. уравнение неразрешимо в простых числах.

Следовательно, уравнение имеет в классе простых чисел единственное реше­ние (3;2).

**5. Другие методы решения Диофантовых уравнений**

**Задача 3.** Доказать, что уравнение x2 – 2\*y2 = 1 имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что (3,2) - одно из решений исходного уравне­ния. С другой стороны из тождества (x2 + 2\*y2)2 – 2\*(2\*x\*y)2 = (x2 – 2\*y2)2 следует, что если (x, y) - решение  данного уравнения, то пара (x2 + 2y2 , 2\*x\*y) также явля­ется его решением. Используя этот факт, рекуррентно определим бесконеч­ную последовательность (xn, yn) различных решений исходного уравнения: (x1 , y1)=(3,2) и xn+1 = xn2 +2\*yn2, yn+1 = 2\*xn\*yn, n = **N**.

**Задача 4.** Доказать, что уравнение x\*(x + 1) = 4\*y\*(y + 1) неразрешимо в целых положительных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению x2 + x + 1 = (2\*y + 1)2.

Следовательно, x2 < (2y + 1)2 < (x + 1)2 или x < 2y + 1 < x + 1. Полученное противо­речие доказывает требуемое утверждение.

**Задача 5.** Решить в целых числах уравнение x + y = x2 – x\*y + y2.

**Решение.** Предположим, что t = x + y. Так как x2 – x\*y +y2 ≥ (1/4)\*(x+y)2, то должно выполняться неравенство  t≥(1/4)\*t2 откуда t [0;4]. [4]

**Примеры**

**1.** Решить в целых числах уравнение: x4 + 3\*x3 – x – 3 = 0.

***Решение:***

Свободный член уравнения имеет следующие делители: +1, +3.

Среди этих чисел и будем искать целые корни данного уравнения. Подстановкой убеждаемся, что корнями являются числа 1 и – 3.

***Ответ:*** x1 = 1, x2 = -3.

**2.**Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению: x2 – y2 = 69.

***Решение:*** Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение в виде: (x – y)\*(x + y) = 69.

Т.к. делителями числа 69 являются числа 1, 3, 23 и 69, то 69 можно получить двумя способами: 69=1\*69 и 69=3\*23. Учитывая, что x – y > 0, получим две системы уравнений, решив которые мы сможем найти искомые числа:

 или ****

Первая система имеет решение x = 35, y = 34, а вторая система имеет решение x = 13, y = 10.

***Ответ:*** (35;34), (13;10).

**3.** Решить в целых числах уравнение: x2 – 3\*x\*y + 2\*y2 = 7.

***Решение:*** Запишем данное уравнение в виде: x2 – x\*y – 2\*x\*y + y2 = 7.

Разложим левую часть уравнения на множители способом группировки, получим: (x – y)\*(x – 2\*y) = 7.

Произведение двух целых чисел может равняться 7 в следующих случаях:

7 = 1\*7 = 7\*1= (-1)\*(-7) = (-7)\*(-1). Таким образом, получим четыре системы:

 или , или , или .

Решением первой системы является пара чисел х = -5, у = -6. Решая вторую систему, получим х = 13, у = 6. Для третьей системы решением являются числа х = 5, у = 6. Четвёртая система имеет решение х = -13, у = -6.

***Ответ:*** (-5;-6), (13;6), (5;6), (-13;-6).

**4.** Доказать, что уравнение: x5 + 3\*x4\*y – 5\*x3\*y2 – 15\*x2\*y3 + 4\*x\*y4 + 15y5 = 33 не имеет целых решений.

***Решение:*** Разложим левую часть уравнения на множители и запишем данное уравнение в виде: (x – 2\*y)\*(x - y)\*(x + y)\*(x + 2\*y)\*(x + 3\*y) = 33.

1 случай: Пусть у = 0, тогда исходное уравнение примет вид x5 = 33.

Тогда x = $\sqrt[5]{33}$, но это число не является целым. Значит, при у = 0 данное уравнение не имеет целых решений.

2 случай: Пусть y ≠ 0, тогда все пять множителей в левой части уравнения различны. С другой стороны число 33 можно представить в виде произведения максиму четырёх различных множителей (33 = 1\*3\*11 или 33 = (-1)\*3\*(-11) и т.д.). Следовательно, при y ≠ 0 данное уравнение также не имеет целых решений.

Библиографический список:

1.     Виленкин Н.Я. «За страницами учебника математики» (10-11 класс).- Москва:          «Просвещение» 1996-320 с.

2.     Шыныбеков Н.А. «Алгебра 8» Алматы «Атамұра» 2004-272 с.

3.     И.Н.Сергеев «Примени математику» 1989г.- 240 с.

4.     math.ournet.md