**Литературный обзор**

Диофантовыми (в честь Диофанта Александрийского, древнегреческого ученого 3-го века) называются алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, имеющие число неизвестных, превосходящее число уравнений.[3] Система становится неопределенной, и у нее находят целые или рациональные решения. Обычно предполагается, что Д. у. имеют [число](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/6190) неизвестных, превосходящее число уравнений, в связи с чем они наз. также неопределенными уравнениями. Понятие Диофантовые уравнения в современной математике часто относят также к алгебраическим уравнениям, решения которых отыскиваются среди целых алгебраических чисел какого-либо алгебраического расширения поля рациональных чисел Q, среди р-адических чисел и т. п.

Решение уравнений в целых числах является одной из древнейших математических задач. Наибольшего расцвета эта область математики достигла в Древней Греции. Так же уже в начале 2-го тысячелетия до н. э. вавилоняне умели решать системы таких уравнений с двумя неизвестными. Создание древнегреческими учеными теории рациональных чисел[1] привело к рассмотрению рациональных решений неопределенных уравнений.

Диофант представляет одну из занимательных загадок в истории математики. Мы не знаем, кем был Диофант, точные года его жизни, нам не известны его предшественники, которые работали бы в той же области, что и он. На могиле Диофанта есть стихотворение - загадка, решая которую нетрудно подсчитать, что Диофант прожил 84 года. О времени жизни Диофанта мы можем судить по работам французского исследователя науки Поля Таннри, и это, вероятно, середина III в.н.э.

Наиболее интересным представляется творчество Диофанта. «Труды его подобны сверкающему огню среди полной непроницаемой тьмы». До нас дошло 7 книг из, возможных, 13 которые были объединены в «Арифметику». В "Арифметике", Диофант излагал начала алгебры, привел множество задач, сводящихся к неопределенным уравнениям различных степеней, и отметил методы нахождения решений таких уравнений в рациональных положительных числах. Также в трактате Диофанта впервые можно было встретить терминологию многомерной геометрии[2].

Стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебре, образцы которых мы знаем по «Началам» Евклида, леммам из сочинений Архимеда и Аполлония. Его книга - один из наиболее увлекательных трактатов, сохранившихся от греко-римской древности. В ней впервые встречается систематическое использование алгебраических символов, есть особые знаки для обозначения неизвестного, минуса, обратной величины, возведения в степень. Книга Диофанта оказала огромное косвенное влияние на развитие математической науки последних трех столетий.

Алгебра Диофанта должна быть отнесена к так называемому периоду «синкопированной алгебры», то есть к тому времени, когда в алгебре переходили от чисто риторического изложения (то есть словесного) к использованию более кратких записей при помощи сокращенных слов и некоторых символов.[4] Так, для изображения неизвестного числа Диофант вводит обозначение S', а когда это неизвестное употребляется во множественном числе, то упомянутое обозначение удваивается. Для каждой степени неизвестного вводились соответствующие синкопированные обозначения. Для обозначения вычитания употребляется знак, а для равенства - буква I. Уменьшаемое писалось раньше вычитаемого, а числовые коэффициенты - после неизвестных. Непосредственное следование одной записи за другой означало действие сложения.

Отрицательные числа Диофанту известны не были, но когда приходилось умножать разность двух чисел на разность двух других чисел, то Диофант пользовался, правилом: «отнимаемое число, будучи умножено на отнимаемое, дает прибавляемое, а, будучи умножено на прибавляемое, дает отнимаемое».

Неопределенные уравнения 1-й степени начали рассматриваться индусскими математиками позднее, примерно с V века. Некоторые такие уравнения с двумя и тремя неизвестными появились в связи с проблемами, возникшими в астрономии, например, при рассмотрении вопросов, связанных с определением периодического повторения небесных явлений.

Следует сказать, что линейным диофантовым уравнением называется уравнение с несколькими неизвестными вида а1х1+…аnхn=с, где (известные) коэффициенты а1, аn и с – целые числа, а неизвестные х1 ,…, хnтакже являются целыми числами. К решению подобных уравнений сводятся разнообразные текстовые задачи, в которых неизвестные величины выражают количество предметов того или иного рода и поэтому являются натуральными (или неотрицательными целыми) числами. Теория решения подобных уравнений является классическим разделом элементарной математики. В ней не приходится писать сложные и громозкие формулы, а необходимо проводить аккуратные рассуждения, базирующиеся на определенных понятиях теории чисел и связанные в стройную логическую конструкцию. В рамках этой теории можно дать исчерпывающее решение рассматриваемого класса задач с четко описанным алгоритмом получения ответа.

Первое общее решение уравнения первой степени где - целые числа, встречается у индийского мудреца Брахмагупты (ок. 625 г). Поэтому, строго говоря, нет оснований называть линейные неопределенные уравнения диофантовыми. Однако исторически все же сложилось применять термин «диофантово», к любому уравнению, решаемому в целых числах.

В 1624 г. публикуется книга французского математика Баше де Мезирьяка «Probl?mes plaisans et delectables que se font par les nombres». Баше де Мезирьяк для решения уравнения фактически применяет процесс, сводящийся к последовательному вычислению неполных частных и рассмотрению подходящих дробей.

После Баше де Мезирьяка в XVII и XVIII веках различные правила для решения неопределенного уравнения 1-й степени с двумя неизвестными давали Роль, Эйлер, Саундерсон и другие математики.

Цепные дроби к решению таких уравнений были применены Лагранжем, который, однако, замечает, что фактически это тот же способ, который был дан Баше де Мезирьяком и другими математиками, рассматривавшими неопределенные уравнения до него. Неопределенные уравнения 1-й степени стали записываться и решаться в форме сравнения значительно позже, начиная с Гаусса.

В августе 1900 г. в Париже состоялся II Международный конгресс математиков. 8 августа Д. Гильберт прочитал на нем доклад "Математические проблемы". Среди 23 проблем, решение которых (по мнению Д. Гильберта) совершенно необходимо было получить в наступающем XX в., десятую проблему он определил следующим образом:

"Пусть задано диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых числах".

Гипотезу, что такого способа нет, первым выдвинул (с достаточным на то основанием) американский математик М. Дэвис в 1949 г. Доказательство этой гипотезы растянулось на 20 лет - последний шаг был сделан только в 1970 г. Юрием Владимировичем Матиясеевичем, на первом году аспирантуры он показал алгоритмическую неразрешимость 10 проблемы Гильберта.

Современной постановкой диофантовых задач мы обязаны Ферма. Именно он поставил перед европейскими математиками вопрос о решении неопределённых уравнений только в целых числах. Надо сказать, что это не было изобретением Ферма - он только возродил интерес к поиску целочисленных решений. А вообще задачи, допускающие только целые решения, были распространены во многих странах в очень далёкие от нас времена. В нынешней математике существует целое направление, занимающееся исследованиями диофантовых уравнений, поиском способов их решений. Называется оно диофантовым анализом и диофантовой геометрией, поскольку использует геометрические способы доказательств.

Мы обратились к этой теме, так как она недостаточно полно изложена в действующих учебниках математики, а задачи по этой теме предлагаются как на олимпиадах, так и на вступительных экзаменах в вузы. Безусловно, тема решение неопределённых уравнений была, есть и будет актуальна. Это и без слов понятно. Недаром ей занимались с самого зарождения математики.

Существует несколько методов решений Диофантовых уравнений.

1. Способ перебора вариантов.
2. Алгоритм Евклида.
3. Цепные дроби.
4. Метод разложения на множители.
5. Решение уравнений в целых числах как квадратных относительно какой-либо переменной.
6. Метод остатков.
7. Метод бесконечного спуска.

Один из методов заключается в том, что можно найти НОД (наибольший общий делитель) натуральных чисел a и b, не раскладывая эти числа на простые множители, а применяя процесс деления с остатком. Для этого надо разделить большее из этих чисел на меньшее, потом меньшее из чисел на остаток при первом делении, затем остаток при первом делении на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка. Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД (*a*, *b*).

Следующий метод связан с непрерывными или цепными дробями (он будет подробно рассмотрен в практической части).

Так же можно решить Диофантово уравнение методом бесконечного спуска. Решение уравнений методом бесконечного спуска проходит по следующей схеме: предположив, что уравнение имеет решения, мы строим некоторый бесконечный процесс, в то время, как по самому смыслу задачи этот процесс должен на чём - то кончаться. Но часто метод бесконечного спуска применяется в более простой форме. Предположив, что мы уже добрались до естественного конца, видим, что «остановиться» не можем.

**Методы решения Диофантовых уравнений**

**1. Алгоритм Евклида.**

Можно найти наибольший общий делитель натуральных чисел а и b, не раскладывая эти числа на простые множители, а применяя процесс деления с ос­татком. Для этого надо разделить большее из этих чисел на меньшее, потом меньшее из чисел на остаток при первом делении, затем остаток при первом деле­нии на остаток при  втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка. Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД (а, b).

Чтобы доказать это утверждение, представим описанный процесс в виде следующей цепочки неравенств: если а>b, то

a = b\*q0 + r1

b = r1\*q1 + r2

r1 = r2\*q2 + r3

…

rn-1 = rn\*qn

Здесь r1, …, rn – положительные остатки, убывающие с возрастанием но­мера. Из первого неравенства следует, что общий делитель чисел а и b делит r1 и общий делитель b и r1 делит а, поэтому НОД (а, b) = НОД (b, r1). Переходя к сле­дующим неравенствам системы, получаем:

НОД(а, b) = НОД (b, r1) = НОД (r1,r2) = … = НОД (rn-1, rn) = НОД (rn, 0) = rn. [5]

Таким образом, решая Диофантовы уравнения первой степени  ax + by = с, можно  применять следующие теоремы:

***Теорема1****.* Если  НОД (a, b) = 1, то уравнение a\*x + b\*y = 1 имеет, по меньшей мере, одну пару (x, y) целого решения.

***Теорема 2.*** Если НОД (a, b) = d >1, и число с не делится на d, то уравнение а\*х + b\*y = с не имеет целого решения.

*Доказательство.* Предположим, что уравнение а\*х + b\*y = с имеет целое реше­ние (х0, y0). Так как,  аhttp://www.coolreferat.com/ref-2_1637501559-77.coolpicd, bhttp://www.coolreferat.com/ref-2_1637501559-77.coolpicd, то получим, что  с = (а\*х + b\*y)http://www.coolreferat.com/ref-2_1637501559-77.coolpicd. Это противоречит условиям теоремы и тем самым теорема доказана.

***Теорема 3.*** Если НОД (a, b) = 1,то все целые решения уравнения а\*х + b\*y = с опре­деляются формулой:

х = х0\*с + b\*t

y = y0\*c - a\*t.

Здесь (х0, y0) – целое решение уравнения а\*х + b\*y = 1, t – произвольное целое число.

**Пример 1.**  Решить в целых числах уравнение 54\*х + 37\*у = 1.

По алгоритму Евклида а = 54, b = 37. Подставляем данные под алгоритм и получаем:

54=37\*1+17, остаток от деления 17 = 54 – 37\*1

Далее, следуя алгоритму, получаем:

37 = 17\*2+3 ,

3 = 37-17\*2

17 = 3\*5+2 ,

2 = 17- 3\*5

3 = 2\*1+1 ,

1 = 3 – 2\*1

После нахождения единицы выражаем через неё значения а и b:

1 = 3 – (17 - 3\*5);

1 = 17 - 3\*4;

1 = 17 - (37 - 17\*2) \*4;

1 = 17 – 37\*4+17\*8;

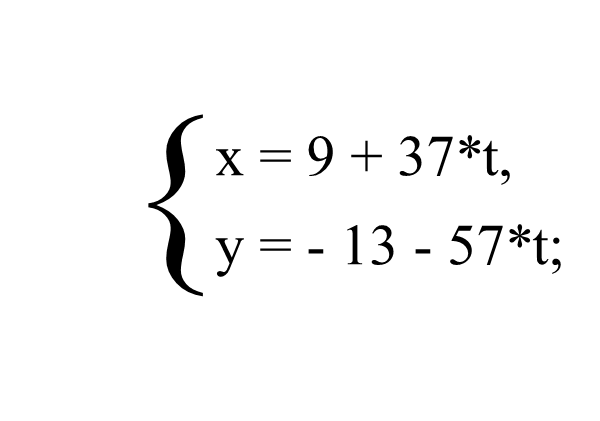
1 = 17\*9 – 37\*4;

1 = (54- 37\*1) \*9 – 37\*4;

1 = 54\*9 – 37\*9 – 37\*4;

1 = 54\*9 – 37\*3;

1 = 54\*х + 37\*у.

Следовательно,  х0 = 9, у0 = -13. Значит, данное уравнение имеет следующее решение   
**Пример 2.** Требуется найти целое решение уравнения 15x + 37y = 1.

***1-й метод.*** Воспользуемся разложением единицы:

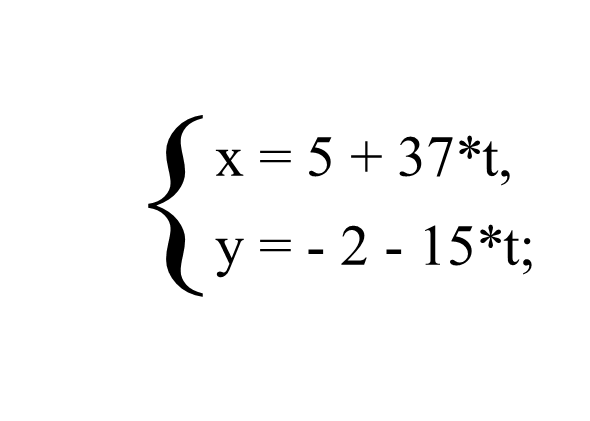
1 = 15\*5 + 37\*(-2).

Ответ:  x = 5, y = -2.

***2-й метод.*** Применяя алгоритм Евклида, имеем: 37 = 15\*2 + 7, 15 = 2\*7 + 1.

Отсюда 1 = 15 – 2\*7 = 15 – 2(37 – 15\*2) = 15\*5 + (-2)\*37.

Тогда  xо = 5, yо = - 2.

Общее решение уравнения есть система .

**Пример 3**. В уравнении 16x + 34y = 7, НОД (16, 34) = 2  и 7 не делится на 2,то нет целых решений.[6]

**2. Цепная дробь**

Одним из применений алгоритма Евклида является представление дроби a1/a2 в виде  q1 + 1/(q2 + 1/…(qn-1 + 1/qn))…

Где **q1** – целое число, а **q2**, … ,**qn** – натуральные числа. Такое выражение на­зывается цепной (конечной непрерывной) дробью.

Уравнение: a\*x + b\*y = c

с взаимно простыми коэффициентами *a* и*b* имеет решение

x0 = (-1)n \* c\*Qn-1,

y0 = (-1)n+1 \* c\*Pn-1,

где Pn-1/ Qn-1 - предпоследняя подходящая дробь к цепной дроби , в которую раскладывается дробь a/d.

**Доказательство:**

Если для заданной цепной дроби с последовательными частными q1, q2,…,qnнесократимые дроби P1/Q1, P2/Q2, … Pn/Qn являются результатами свертывания подходящих дробей q1 + 1/q2,  q1 + 1/(q2 + 1/q3), и т.д. порядка 1, 2, …, n соответственно, то

Pk/Qk – Pk-1/Qk-1 = (-1)k/(Qk \* Qk-1), k=2, …, n.

При *k = n* получаем: Pn/Qn – Pn-1/Qn-1 = (-1)n/(Qn \* Qn-1),

Где Pn/Qn = a/b - последняя подходящая дробь к цепной дроби, в которую раскладывается дробь a/b. Так как дроби Pn/Qn и a/b несократимы, то Pn = a, Qn = b и a\*Qn-1 – b\* Pn-1 = (-1)n.

Умножая обе части последнего равенства на (-1)n, имеем  a\*((-1)n \*c\*Qn-1)+b\*((-1)n+1 \*c\*Pn-1) = c,

То есть пара чисел x0 = (-1)n \*c\*Qn-1, y0 = (-1)n+1 \*c\*Pn-1 , где n - порядок цепной дроби, является решением уравнения a\*x + b\*y = c.

**Пример.**Для перевозки большого количества контейнеров по 170 кг и по 190 кг выделены трехтонные машины. Можно ли ими загружать машины полно­стью?

**Решение:**

Пусть **х** и **у** количество контейнеров по 170 и 190 кг соответственно, тогда имеем уравнение

170\*х+190\*у=3000,

После сокращения на 10 уравнение выглядит так,

17\*х+19\*у=300.

Для нахождения частного решения воспользуемся разложением дроби 17/19 в цепную дробь 17/19 = 1/(1+2/17) = 1/(1+1/(8+1/2)).

Свернув предпоследнюю подходящую к ней дробь в обыкновенную 1/(1+1/8) = 8/9.

Частное решение данного уравнения имеет вид х0 = (-1)4\*300\*9=2700,  у0=(-1)5\*300\*8=-2400, а общее задается формулой

Х = 2700-19k,       y = -2400+17k.

откуда получаем условие на параметр k

141 < 2400/17 ≤ k ≤ 2700/19 < 143

Т.е. k=142, x=2,  y=14.[7]

**3.** **Метод разложения на множители**

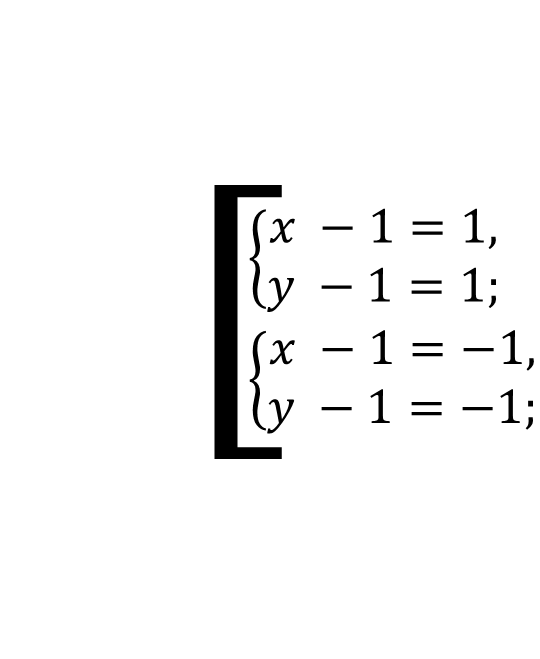
Данный метод и все последующие применяются к решению Диофантовых уравнений второй степени.

**Задача 1.** Решить в целых числах уравнение x + y = x\*y.

**Решение.** Запишем уравнение в виде

(x - 1)(y - 1) = 1.

Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они равны 1. Т. е. исходное уравнение равносильно совокупности



с решениями (0,0) и (2,2).

**4. Использование четности**

**Задача 2.** Решить в простых числах уравнение  x2 – 2\*y2 = 1.

**Решение.** Рассмотрим два случая в зависимости от четности переменной x.

1. Пусть x - нечетное число. Подстановка x = 2\*t + 1 приводит исходное уравне­ние к виду (2\*t + 1)2 – 2\*y2 = 1, или 2\*y2 = 4\*t(t + 1).

Следовательно, 2 | y2. Так как y - простое число, то y = 2. Отсюда x = = 3.

б) Пусть x - четное число. Так как x - простое число, то x = 2.

Следовательно, y =   не принадлежит N, т. е. уравнение неразрешимо в простых числах.

Следовательно, уравнение имеет в классе простых чисел единственное реше­ние (3;2).

**5. Другие методы решения Диофантовых уравнений**

**Задача 3.** Доказать, что уравнение x2 – 2\*y2 = 1 имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что (3,2) - одно из решений исходного уравне­ния. С другой стороны из тождества (x2 + 2\*y2)2 – 2\*(2\*x\*y)2 = (x2 – 2\*y2)2 следует, что если (x, y) - решение  данного уравнения, то пара (x2 + 2y2 , 2\*x\*y) также явля­ется его решением. Используя этот факт, рекуррентно определим бесконеч­ную последовательность (xn, yn) различных решений исходного уравнения: (x1 , y1)=(3,2) и xn+1 = xn2 +2\*yn2, yn+1 = 2\*xn\*yn, n = **N**.

**Задача 4.** Доказать, что уравнение x\*(x + 1) = 4\*y\*(y + 1) неразрешимо в целых положительных числах.

**Решение.** Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению x2 + x + 1 = (2\*y + 1)2.

Следовательно, x2 < (2y + 1)2 < (x + 1)2 или x < 2y + 1 < x + 1. Полученное противо­речие доказывает требуемое утверждение.

**Задача 5.** Решить в целых числах уравнение x + y = x2 – x\*y + y2.

**Решение.** Предположим, что t = x + y. Так как x2 – x\*y +y2 ≥ (1/4)\*(x+y)2, то должно выполняться неравенство  t≥(1/4)\*t2 откуда t [0;4]. [8]

Библиографический список:

1. <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%E0%F6%E8%EE%ED%E0%EB%FC%ED%EE%E5_%F7%E8%F1%EB%EE>
2. <http://www.arifmetica.com/diofant.php>
3. <http://sernam.ru/book_e_math.php?id=37>
4. <http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/1506/%D0%94%D0%98%D0%9E%D0%A4%D0%90%D0%9D%D0%A2%D0%9E%D0%92%D0%AB>
5. Виленкин Н.Я. «За страницами учебника математики» (10-11 класс).- Москва:          «Просвещение» 1996-320 с.
6. Шыныбеков Н.А. «Алгебра 8» Алматы «Атамұра» 2004-272 с.
7. И.Н.Сергеев «Примени математику» 1989г.- 240 с.
8. math.ournet.md